Die vorliegende Einführung in die Mathematik ist im Rahmen der Vorlesung Elektrizitätslehre am Lehrstuhl für Technische Elektrophysik der TU München entstanden und daher als Hilfmittel zur Vorlesung Elektrizität und Magnetismus nur insofern geeignet, als in diesem Skript einige grundlegende Begriffe wiederholt und ein paar einfache Anwendungsbeispiele gegeben werden. Es wird dabei nicht der Anspruch auf Vollständigkeit erhoben, sondern auf die entsprechenden Spezialvorlesungen der Mathematik verwiesen.

Bei aller Sorgfalt ist es nicht auszuschließen, dass einige Fehler in diesem Manuskript enthalten sind. Um in den kommenden Semestern eine möglichst fehlerfreie Version der mathematischen Einführung anbieten zu können, sind wir für jeden Hinweis auf Fehler dankbar. Zu erreichen sind wir mittels e-Mail unter heigl@tep.ei.tum.de.

Vielen Dank für Ihre Mithilfe,

Alexander Heigl, April 2010.

# MATHEMATISCHE EINFÜHRUNG IN DIE ELEKTRIZITÄTSLEHRE

ALEXANDER M. HEIGL

*04. Mai 2010*

Zusammenfassung. In diesem kurzen Artikel werden die mathematischen Grundlagen für die Vorlesung Elektrizitätslehre bereitgestellt. Als Ziel ist die praktische Anwendung der vorgestellten Methoden gesetzt. So werden letztlich viele Aspekte weniger detailliert behandelt, als es nach strengen mathematischen Gesichtspunkten erforderlich ist.

## Inhaltsverzeichnis

## Teil 1. Vorbemerkungen

Da vielfach bei Studienbeginn unterschiedliche Vorkenntnisse der Mathematik gegeben sind, ist es unverzichtbar einige Grundlagen zu wiederholen. Zusätzlich verlangen einige der Vorlesungen des ersten Semesters Kenntnisse der Höheren Mathematik, die jedoch erst im Laufe des Studiums gelehrt werden. Aus diesem Grund ist es zunächst sinnvoll die wesentlichen Konzepte ohne die notwendige mathematische Strenge zu erläutern.

Die hier vorliegende Einführung basiert in weiten Teilen auf dem Lehrbuch "Vektoranalysis" von D.E. Bourne und P.C. Kendall. Hierbei entspricht die behandelte Thematik weitestgehend der üblichen Einführungsveranstaltung zur Vorlesung Elektrizitätslehre. Den Kern dieses Skriptes stellt dabei die Analysis mehrdimensionaler Vektorräume dar. So wird ein besonderes Gewicht auf die Integration im $\mathbb{R}^n$ gelegt. Von zentraler Bedeutung ist vor allem die Erweiterung der grundlegenden Integrations- und Differentationstechniken, wie sie aus dem Schulunterricht hinlänglich bekannt sein sollten.

Im ersten Abschnitt werden die grundlegenden Eigenschaften von Vektoren und Vektorräumen wiederholt und eine Einführung in den Feldbegriff gegeben. Von besonderem Interesse ist es auf die notwendige Unterscheidung von Koordinaten und Vektoren hinzuweisen und im Hinblick auf die Integralrechnung das Prinzip der Parametrisierung vektorwertiger Funktionen vorzustellen. Die Thematik des zweiten Abschnittes ist die wichtige Verallgemeinerung der Differentialrechnung auf mehrdimensionale Problemstellungen. Davon ausgehend wird anschließend die Integralrechnung einer und mehrerer Veränderlicher erklärt. Es ist das Ziel dieses vierten Abschnittes das Rechnen mit Linien- und Flächenintegralen zu ermöglichen. Abschließend werden noch die wichtigsten Koordinatensysteme zusammenfassend vorgestellt.

Am Ende ist darauf hinzuweisen, dass das einfache Lesen dieses Skriptes nicht ausreichend ist den Stoff zu verstehen. So ist es sinnvoll den vorliegenden Text zu bearbeiten und dann eigene Bespiele zu entwickeln, um anhand dieser das Verständnis zu testen.

## Teil 2. Vektoren und Felder

### 1. Grundbegriffe

Es ist auf jeden Fall sinnvoll eine anschauliche Interpretation des Vektorbegriffes zu geben, bevor eine strenge mathematische Definition folgt. Ein Vektor ist demnach definiert als Klasse aller Richtungsvektoren mit gleicher Länge und Richtung. Jeder Richtungspfeil repräsentiert dabei den Vektor.

**Definition 2.1.** Zwischen zwei Punkten $P$ und $Q$ eines Raumes gibt es genau eine Abbildung, die $P$ nach $Q$ abbildet. Diese Verschiebung heißt **Vektor**.

An dieser Stelle ist ein erstes einfaches Beispiel angebracht. Betrachten wir den Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}$, wie er in Abbildung 1 dargestellt ist. So gilt

$$\vec{v} = v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y + v_z\vec{e}_z$$

bezüglich einer Orthonormalbasis (ONB) $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$. Bei einer fest vereinbarten ONB benutzt man auch die Schreibweise

$$\vec{v} \equiv \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = (v_x, v_y, v_z)^T$$

$v_x, v_y, v_z$ sind dabei die kartesischen Vektorkomponenten von $\vec{v}$ in Richtung der Basisvektoren $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$.

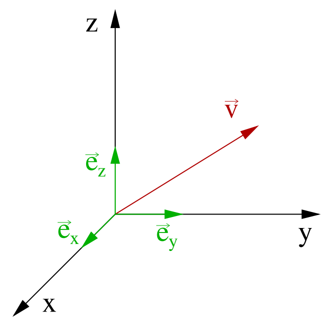


Abbildung 1. Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}$.

**Definition 2.2.** Man nennt $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ eine **Linearkombination** der Vektoren $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m \in \mathbb{R}^n$, wenn es reelle Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ gibt mit

$$\vec{y} = \lambda_1 \vec{x}_1 + \cdots + \lambda_m \vec{x}_m$$

**Definition 2.3.** Die Vektoren $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m \in \mathbb{R}^n$ heißen **linear unabhängig**, wenn sich der Nullvektor nur trivial als Linearkombination dieser darstellen läßt. Das heißt

$$\lambda_1 \vec{x}_1 + \cdots + \lambda_m \vec{x}_m = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_i = 0 \quad \forall\, i \in [1, \ldots, m]$$

Jeder Vektorraum hat eine Basis. Jede Basis des $\mathbb{R}^n$ besteht dabei aus $n$ linear unabhängigen Vektoren. Ist $B = (\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n)$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$, so läßt sich jeder Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ eindeutig als Linearkombination der einzelnen $\vec{b}_i$ ausdrücken

$$\vec{x} = x_1 \vec{b}_1 + \cdots + x_n \vec{b}_n$$

Es bleibt an dieser Stelle anzumerken, dass die Darstellung von Vektoren in der Form $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ nicht eindeutig ist. So kann ein und derselbe Vektor mittels unterschiedlicher Koordinatensysteme dargestellt werden. Man denke nur an zwei zueinander verschobene kartesische Koordinatensysteme und die zugehörigen Darstellungen. Es ist daher in der Koordinatenschreibweise immer die Angabe einer konkreten Basis erforderlich.

## 2. Rechnen mit Vektoren

Für das konkrete Rechnen mit Vektoren sind die Kenntnisse einiger elementarer Eigenschaften ebendieser erforderlich. So sind in einer vollständigen Definition von Vektorräumen (wie beispielsweise dem $\mathbb{R}^n$) diese Regeln enthalten [5].

Der Betrag eines Vektors $\vec{a}$ ist seine Länge. Für einen Vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ gilt dann

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$$

wobei die Definition des Skalarproduktes $\vec{a} \cdot \vec{a}$ in Abschnitt 2.1 vorgenommen wird. Ein Vektor der Länge Eins heißt Einheitsvektor. Der Einheitsvektor in Richtung $\vec{a}$ ist für $\vec{a} \neq 0$ gleich

$$\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

Die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar kann nun komponentenweise durchgeführt werden. Mit $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ gilt in Koordinatenform

$$\lambda \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \lambda \cdot x_2 \\ \lambda \cdot x_3 \end{pmatrix}$$

In Abbildung 2 sind die Resultate einer skalaren Multiplikation illustriert. Zur besseren Veranschaulichung werden dabei Vektoren im $\mathbb{R}^2$ betrachtet.

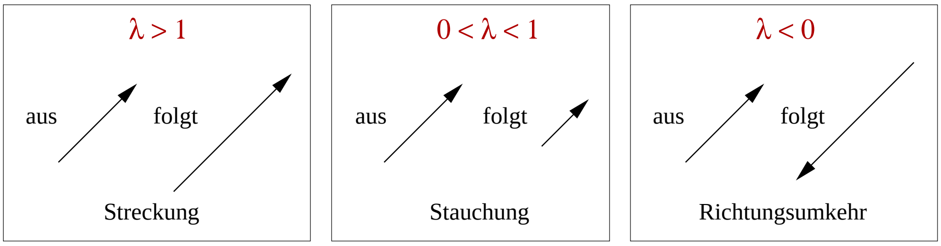


Abbildung 2. Skalare Multiplikation im $\mathbb{R}^2$.

Die Addition zweier Vektoren funktioniert ebenso einfach. Mit $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ gilt in Koordinatenschreibweise

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}$$

wobei die beiden Vektoren jedoch in derselben Basis gegeben sein müssen. Die Abbildung 3 zeigt die einfache Addition zweier Vektoren.

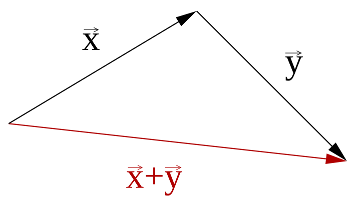


Abbildung 3. Addition zweier Vektoren im $\mathbb{R}^2$.

2.1. **Skalarprodukt.** Mit den beiden Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ und $\varphi$ als dem von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ eingeschlossenem Winkel $(0 \leq \varphi \leq \pi)$ gilt für das Skalarprodukt

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \begin{cases} |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot \cos\varphi & , \text{falls } \vec{x}, \vec{y} \neq 0 \\ 0 & , \text{falls } \vec{x} = 0 \vee \vec{y} = 0 \end{cases}$$

Bei der Darstellung der Vektoren in gleicher Basis kann das Skalarprodukt auch komponentenweise berechnet werden

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

Diese Definition des Skalarproduktes kann dabei ohne weitere Schwierigkeiten auf höhere Dimensionen erweitert werden. Das Skalarprodukt wird vielfach auch als inneres Vektorprodukt bezeichnet. In Tabelle 1 sind noch einige wichtige Eigenschaften des inneren Produktes zusammengestellt.

Tabelle 1. Eigenschaften des inneren Produktes

| | | |
|---|---|---|
| (1) | $\vec{x} \cdot \vec{x} = \|\vec{x}\|^2 \geq 0$ | Betrag |
| (2) | $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$ | Kommutativität |
| (3) | $\vec{x} \perp \vec{y} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x} \cdot \vec{y} = 0$ | Orthogonalität |
| (4) | $\|\vec{x} \cdot \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$ | Cauchy-Schwarzsche-Ungleichung |
| (5) | $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ | Dreiecksungleichung |

An dieser Stelle sind einige Anmerkungen zu dem Begriff Orthonormalbasis angebracht. Eine Basis ist dann eine ONB, wenn alle erzeugenden Vektoren Einheitsvektoren und jeweils paarweise orthogonal sind. Ein Vektor ist also orthonormal, wenn er sowohl orthogonal als auch auf Eins normiert ist.

2.2. **Vektorprodukt.** Dieses Produkt ist dabei nur im $\mathbb{R}^3$ definiert. In vielen Lehrbüchern finden auch die Bezeichungen äußeres Produkt oder Kreuzprodukt Verwendung.

**Definition 2.4.** Der Vektor $\vec{x} \times \vec{y}$ mit $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ ist definiert durch

(1) $|\vec{x} \times \vec{y}| = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot \sin\varphi \quad$ mit Zwischenwinkel $\varphi$
(2) $\vec{x} \times \vec{y}$ ist orthogonal zu $\vec{x}$ und $\vec{y}$
(3) $\vec{x}, \vec{y}$ und $\vec{x} \times \vec{y}$ bilden ein Rechtssystem

Sind die beiden Vektoren in derselben Basis gegeben, kann die Berechnung auch komponentenweise erfolgen:

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

oder auch formal über die Determinante

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & x_1 & y_1 \\ \vec{e}_2 & x_2 & y_2 \\ \vec{e}_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

An dieser Stelle sind noch einige Hinweise zur Berechnung von Determinanten notwendig. So kann die allgemeine Entwicklungsmethode eingesetzt werden. Bei dieser wird nach der $i$-ten Zeile oder $j$-ten Spalte entwickelt. Damit gilt für eine Matrix $A$ vom Typ $n \times n$

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} A_{ij}$$

bei der Entwicklung nach der $i$-ten Zeile oder

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} A_{ij}$$

bei der Entwicklung nach der $j$-ten Spalte. Die jeweiligen Unterdeterminanten $A_{ij}$ erhält man durch Streichen der $i$-ten Zeile und der $j$-ten Spalte und die $a_{ij}$ sind die Elemente der Matrix $A$.

In Abbildung 4 ist das äußere Produkt zweier Vektoren veranschaulicht. Der Betrag $|\vec{x} \times \vec{y}|$ ist hierbei der Flächeninhalt des durch $\vec{x}$ und $\vec{y}$ aufgespannten Trapezes. Dieser Zusammenhang wird bei der Behandlung von differentiellen Flächenelementen noch einmal wichtig.

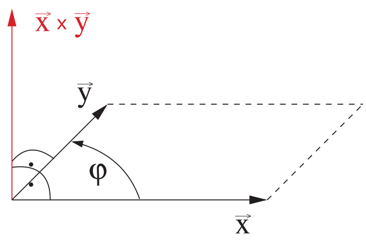


Abbildung 4. Äußeres Produkt zweier Vektoren.

Es folgen einige häufig benutzte Sätze zu inneren und äußeren Produkten. Die sogenannte Grassman-Entwicklung lautet

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \left(\vec{a} \cdot \vec{c}\right)\vec{b} - \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)\vec{c}$$

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c} = \left(\vec{a} \cdot \vec{c}\right)\vec{b} - \left(\vec{b} \cdot \vec{c}\right)\vec{a}$$

und die Lagrange-Identität hat die Form

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \left(\vec{c} \times \vec{d}\right) = \left(\vec{a} \cdot \vec{c}\right)\left(\vec{b} \cdot \vec{d}\right) - \left(\vec{a} \cdot \vec{d}\right)\left(\vec{b} \cdot \vec{c}\right)$$

2.3. **Spatprodukt.** Ein weiteres wichtiges Vektorprodukt ist das sogenannte Spatprodukt. Wie auch das äußere Produkt ist es nur im $\mathbb{R}^3$ definiert. Das Spatprodukt ist eine skalare Größe und ist definiert als

$$\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = \vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \det\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$$

wobei festzuhalten ist, dass die Berechnung über die Determinante nur im Fall kartesischer Koordinaten gültig ist. Für das Spatprodukt gilt hierbei allgemein die zyklische Vertauschung

$$\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = \left[\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}\right] = \left[\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}\right] = -\left[\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}\right] = \dots$$

Der Begriff zyklische Vertauschung bedeutet dabei, dass jede gerade Anzahl an Vertauschungen zweier Elemente ein positives und jede ungerade Anzahl ein negatives Vorzeichen liefert.

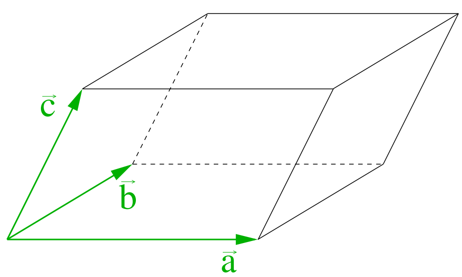


Abbildung 5. Volumeninterpretaion des Spatproduktes.

In Abbildung 5 ist die geometrische Bedeutung des Spatproduktes gezeigt. So ist das Spatprodukt gleich dem Volumen des von den drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und

$\vec{c}$ aufgespannten Parallelepipeds (dieses wird auch als Spat bezeichnet). Liegen die drei Vektoren in einer Ebene, dann ergibt sich für das Spatprodukt der Wert Null. Somit kann auf einfache Art und Weise die lineare Unabhängigkeit dreier Vektoren getestet werden. In einigen Lehrbüchern wird das Spatprodukt auch als gemischtes Produkt bezeichnet.

## 3. Vektorwertige Funktionen

Für die nachfolgenden Abschnitte ist die Parametrisierung von Kurven im $\mathbb{R}^n$ von besonderer Bedeutung. So wird in der physikalischen Anwendung an vielen Stellen nach einer Richtungsableitung, einem Tangentenvektor an eine Kurve oder einem Linienintegral gefragt.

**Definition 2.5.** Die Parameterdarstellung einer Kurve im $\mathbb{R}^n$ ist definiert durch die Abbildung $\vec{x} : I \to \mathbb{R}^n$, $\lambda \mapsto \vec{x}(\lambda)$ mit $\lambda \in I \subseteq \mathbb{R}$. Diese Kurve ist auf dem Intervall $I$ definiert und besteht aus $n$ Komponentenfunktionen.

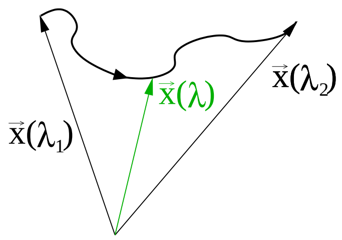


Abbildung 6. Parametrisierung einer Raumkurve.

Die Bezeichnung Parameter ist etwas irreführend, da eine Variable $\lambda$ eingeführt wird, von der die Ortskoordinaten mittelbar abhängen. In Abbildung 6 ist die Parametrisierung einer beliebigen Kurve gezeigt. Wie auch in der Abbildung zu sehen ist, hat jede Raumkurve eine Richtung.

Es ist an dieser Stelle angebracht einige Beispiele zu untersuchen. Zu diesem Zweck betrachten wir den Punkt $P$ in Abbildung 7. Es gibt eine unbegrenzte Zahl an Wegen vom Ursprung des Koordinatensystems zum Punkt $P$. In der Abbildung sind mit $C_1$ und $C_2$ zwei mögliche Pfade gezeigt.

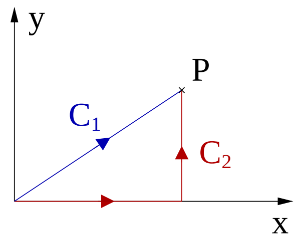


Abbildung 7. Parametrisierung eines Geradenstückes.

Der Weg $C_1$ ist die kürzeste Verbindung der beiden Punkte. In einem ersten Schritt ist nun festzulegen, welcher Parameter gewählt werden soll. Wird nun beispielsweise die $y$-Koordinate gewählt folgt

$$C_1 : \vec{x}(\lambda) = (2\lambda, \lambda, 0)^T \quad \text{mit } \lambda \in [0, 1]$$

Dabei ist zu erkennen, dass zuerst der Parameter festzulegen ist und dann die anderen Ortskoordinaten durch diesen ausgedrückt werden müssen. Eine alternative Beschreibung der Kurve folgt durch die $x$-Koordinate

$$C_1 : \vec{x}(\mu) = \left(\mu, \frac{1}{2}\mu, 0\right)^T \quad \text{mit } \mu \in [0, 2]$$

Vielfach sind einzelne Koordinaten geeignete Parameter. Allerdings ist es in einigen Situationen geschickter eine andere Wahl zu treffen. Eine häufige Wahl ist dabei die Bogenlänge $s$. Damit ist bei einer Bewegung entlang der Kurve dieser Parameter ein Maß für die zurückgelegte Strecke. In dem betrachteten Beispiel gilt dann

$$C_1 : \vec{x}(s) = \left(\frac{2s}{\sqrt{5}}, \frac{s}{\sqrt{5}}, 0\right)^T \quad \text{mit } s \in \left[0, \sqrt{5}\right]$$

Analog ergibt sich für die zweite Kurve in Abbildung 7

$$C_2 : \vec{x}(s) = \begin{cases} (s, 0, 0)^T & \text{für } s \in [0, 2] \\ (2, s-2, 0)^T & \text{für } s \in [2, 3] \end{cases}$$

In einem zweiten Beispiel wird in der $xy$-Ebene ein Halbkreis um den Urprung mit dem Radius $R$ parametrisiert (siehe Abbildung 8). Auch hier kann erneut die Bogenlänge verwandt werden, jedoch gibt es in diesem Fall einen deutlich besser geeigneten Parameter.

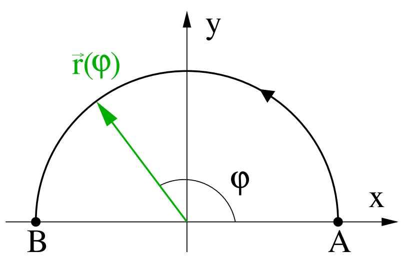


ABBILDUNG 8. Parametrisierung eines Halbkreises.

Aus der analytischen Geometrie ist bekannt, dass ein beliebiger Kreis durch die trigonometrischen Funktionen beschrieben werden kann. So folgt mit dem Winkel $\varphi$ als Parameter

$$C : \vec{r}(\varphi) = (R \cdot \cos\varphi, R \cdot \sin\varphi, 0)^T \quad \text{mit } \varphi \in [0, \pi]$$

wobei die Umlaufrichtung zu beachten ist. Eine alternative Beschreibung erfolgt durch die Wahl der $x$-Koordinate als Parameter. Dann gilt

$$C : \vec{r}(x) = \left(-x, \sqrt{R^2 - x^2}, 0\right)^T \quad \text{mit } x \in [-R, R]$$

wobei zu beachten ist, dass der Umlaufsinn und die Auswahl des Intervalles die Vorzeichen der einzelnen Komponenten festlegen. Wird nun ein Vollkreis untersucht ist die Parametrisierung nach dem Winkel vorzuziehen, da bei der $x$-Koordinate eine Fallunterscheidung bei der Wurzelfunktion nötig ist.

In vielen Situationen ist auch die Zeit ein möglicher Parameter. Insgesamt bleibt aber vor allem festzuhalten, dass es sinnvoll ist die Parameter in jedem Fall problemangepasst zu wählen.

## 4. Feldbegriff

In der Physik ist vielfach von Feldern die Rede. Aus diesem Grund ist die Frage zu beantworten wie diese überhaupt definiert sind. Ein **stationäres Feld** einer Größe $A$ ist die Abbildung $\vec{r} \mapsto A(\vec{r})$, welche jedem Ort $\vec{r}$ den Wert der Größe zuordnet und ein **zeitabhängiges Feld** einer Größe $A$ ist die Abbildung $(\vec{r}, t) \mapsto A(\vec{r}, t)$, welche jedem Ort $\vec{r}$ zur Zeit $t$ den Wert der Größe zuordnet. Es bleibt noch zu klären was diese Größe $A$ eigentlich ist. Auf diese Weise resultiert ein weiteres Unterscheidungsmerkmal von Feldern.

**Definition 2.6.** Ein skalares Feld ist ein Feld, dass an jeder Stelle durch eine reelle oder komplexe Zahl charakterisiert ist.

$$f : \mathbb{R}^3 \supseteq D \to \mathbb{R}, \text{ jedem } \vec{x} \in D \text{ wird eine Zahl } f(\vec{x}) \text{ zugeordnet.}$$

Beipiele für skalare Felder sind das elektrostatische Potential, die Temperatur oder der Druck. Im Fall von Skalarfeldern ist auch der Begriff der Niveauflächen wichtig. So ist eine Niveaufläche die Gesamtheit aller Punkte $\vec{x}$ für die der Funktionswert $f(\vec{x})$ des Skalarfeldes den gleichen Wert annimmt.

**Definition 2.7.** Ein vektorielles Feld ist ein Feld, dass an jeder Stelle durch einen Vektor charakterisiert ist.

$$\vec{v} : \mathbb{R}^3 \supseteq D \to \mathbb{R}^3, \text{ jedem } \vec{x} \in D \text{ wird ein Vektor } \vec{v}(\vec{x}) \text{ zugeordnet.}$$

Beispiele für Vektorfelder sind das elektrische und das magnetische Feld oder die Geschwindigkeit einer Wasserströmung. Eng verbunden mit vektoriellen Feldern ist auch der Begriff der Feldlinie. Eine Kurve heißt genau dann Feldlinie des Vektorfeldes, wenn der Vektor des Feldes in jedem Punkt der Tangentenvektor der Kurve ist. Hieraus folgt, dass sich Feldlinien nicht schneiden.

# Teil 3. Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$

Bevor nun die wesentlichen Eigenschaften der Differentiation im $\mathbb{R}^n$ vorgestellt werden können, ist es notwendig die Begriffe Funktion, Grenzwert, Stetigkeit und Differential kurz zu wiederholen. Die grundlegenden Funktionen werden allerdings als bekannt vorausgesetzt.

## 5. Grenzwerte von Funktionen

Nachdem bereits an vielen Stellen der Funktionsbegriff verwandt wurde, ist es an der Zeit die korrekte Schreibweise kurz vorzustellen. Eine Funktion (oder Abbildung) wird geschrieben als

$$f : D \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) \text{ mit } x \in D \subseteq \mathbb{R}$$

mit dem Definitionsbereich $D$ und dem Funktionswert $f(x)$. Bei Funktionen mehrerer Veränderlicher ist der Definitionsbereich eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$.

Für die Definition der Ableitung ist es notwendig den Begriff des Grenzwertes von Funktionen einzuführen.

**Definition 3.1** (Grenzwert einer Funktion $f$ an der Stelle $x_0$)**.** Es sei $(a, b)$ ein offenes Intervall und $x_0 \in (a, b)$. Ist $D = \{x \in (a, b) | x \neq x_0\}$ und $f : D \to \mathbb{R}$, so hat $f$ für $x \to x_0$ den Grenzwert $y_0$, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, mit $x \in D$ und

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - y_0| < \epsilon$$

Die geläufige Schreibweise für Grenzwerte ist dabei

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$$

Der Grenzwert der Funktion $f$ an der Stelle $x_0$ existiert genau dann, wenn der rechtsseitige und der linksseitige Grenzwert existieren und gleich sind. Das Rechnen mit Grenzwerten folgt den geläufigen Regeln für reelle Zahlen. So ist der Grenzwert einer Summe (Produktes) gleich der Summe (Produkte) der Grenzwerte. Das ist allerdings nur dann der Fall, wenn alle Grenzwerte auch einzeln existieren.

Zum besseren Verständnis des Grenzwertbegriffes ist es sinnvoll zwei kleine Bespiele zu betrachten:

**Beispiel 3.1.**

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(x+1)(x-2)}{2x^2 - 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{(1 + \frac{1}{x})(1 - \frac{2}{x})}{2 - \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}$$

**Beispiel 3.2.**

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \overset{\text{l.H.}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

**Definition 3.2** (Stetigkeit einer Funktion $f$ an der Stelle $x_0$)**.** Die Abbildung $f : D \to \mathbb{R}$ heißt an der Stelle $x_0 \in D$ stetig, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, mit $x \in D$ und

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

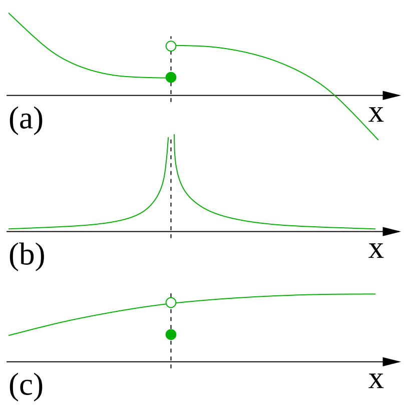


Abbildung 9. Unstetigkeiten von Funktionen.

Um den Zusammenhang von Grenzwerten und Stetigkeit zu verdeutlichen sind in Abbildung 9 unterschiedliche Typen an Unstetigkeiten gezeigt. Im den ersten beiden Fällen existiert der Grenzwert nicht, da bei (a) eine Sprungstelle und bei (b) eine Polstelle vorliegt. Das Bild (c) zeigt dagegen eine Unstetigkeit bei der der Grenzwert existiert. Allerdings ist der Grenzwert dabei ungleich dem Funktionswert. Diese Form der Unstetigkeit wird im Allgemeinen als hebbare Unstetigkeitsstelle bezeichnet.

## 6. Differentialrechnung in einer Veränderlichen

Bereits im Rahmen der elementaren Schulmathematik wurde der Begriff der Ableitung eingeführt. Die Definition der Ableitung einer Funktion erfolgt mit Hilfe des Grenzwertbegriffes.

**Definition 3.3** (Differenzierbarkeit einer Funktion $f$ an der Stelle $x_0$)**.** Es sei $D$ ein offenes Intervall und $x_0 \in D$. Eine Abbildung $f : D \to \mathbb{R}$ heißt im Punkt $x_0$ differenzierbar, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'(x)$$

existiert. Dieser Grenzwert $f'(x)$ heißt dann Ableitung von $f$ in $x_0$.

Die Abbildung $f$ heißt in $D$ differenzierbar, wenn $f$ in jedem Punkt von $D$ differenzierbar ist. Die Funktion $f'(x)$, die jedem $x \in D$ die Ableitung $f'(x)$ zuordnet, heißt dann Ableitung von $f$. In diesem Zusammenhang sind einige alternative Schreibweisen gegeben

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}$$

Dabei bleibt festzuhalten, dass die letzten beiden Schreibweisen im Regelfall am besten geeignet sind. So ist hierbei die Eindeutigkeit gewährleistet, da klar zu erkennen ist, nach welcher Variablen die Funktion $f$ abgeleitet wird.

Der Ableitungsbegriff kann auf unterschiedliche Weise gedeutet werden. Eine erste Möglichkeit ist die sogenannte geometrische Interpretation. Dieser Fall ist in Abbildung 10 veranschaulicht. Die Ableitung ist dann die Steigung der Tangente an die Funktionskurve im betrachteten Punkt. Alternativ dazu kann eine physikalische Deutung benutzt werden. Dabei ist nun die Geschwindigkeit die Ableitung des Ortes nach der Zeit. Als dritte Option steht die analytische Deutung zur Verfügung. Bei dieser wird die Funktion linear approximiert, das heißt die Kurve wird lokal durch eine Gerade genähert.

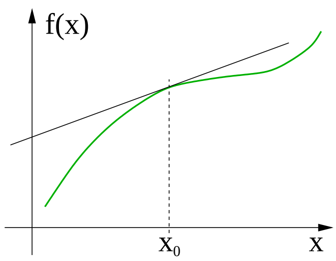


Abbildung 10. Geometrische Deutung der Differentiation.

Insgesamt ist die Stetigkeit der Funktion $f$ eine notwendige Voraussetzung für die Differenzierbarkeit. So existiert an einer Unstetigkeitsstelle die Ableitung einer Funktion definitionsgemäß nicht. Es sind noch einige Eigenschaften der Differentiation festzuhalten, bevor der Ableitungsbegriff verallgemeinert werden kann. In Tabelle 2 sind zu diesem Zweck ein paar wichtige Regeln übersichtlich zusammengestellt. Auf Beispiele und die grundlegenden Ableitungsregeln wird an dieser Stelle verzichtet und auf die angegebene Literatur [2, 3] verwiesen.

In Bezug auf die Differentiation von Umkehrfunktionen ist noch ein Hinweis erforderlich. Ist $y = f(x)$ eine umkehrbare differenzierbare Funktion, dann ist

Tabelle 2. Differentiationsregeln

| | | |
|---|---|---|
| (1) | $\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ | Kettenregel |
| (2) | $(u+v)' = u' + v'$ | Summenregel |
| (3) | $(u \cdot v)' = u'v + uv'$ | Produktregel |
| (4) | $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ | Quotientenregel |

die Umkehrfunktion $x = g(y)$ differenzierbar und es gilt

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} \quad \text{bzw.} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \quad \text{für } f'(x) \neq 0$$

Nachdem die elementaren Grundlagen der Differentiation wiederholt worden sind, kann in den nächsten beiden Teilabschnitten eine Verallgemeinerung der Begriffe auf Funktionen mehrerer Veränderlicher vorgenommen werden.

## 7. Differentialrechnung in mehreren Veränderlichen

In diesem Abschnitt werden die wichtigsten Prinzipien für die Differentiation von Funktionen mehrerer Variablen eingeführt. Dabei ist es das Ziel, ausgehend von einer geometrischen Interpretation, zu einer formalen Beschreibung der partiellen Ableitung zu gelangen, um damit das möglichst geläufige Rechnen mit partiellen Differentialen zu ermöglichen.

**Definition 3.4.** Eine reellwertige skalare Funktion mehrerer Veränderlicher ist eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $w = f(x_1, \ldots, x_n)$. Die $x_i$ sind dabei die unabhängigen Variablen.

Im weiteren Verlauf dieses Abschnittes wird eine Beschränkung auf Funktionen zweier Veränderlicher vorgenommen. Die vorgestellten Konzepte sind hierbei jedoch ohne weitere Schwierigkeiten auf mehr als zwei Variable anwendbar.

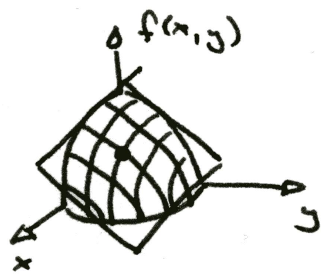


Abbildung 11. Tangentialebene an eine Funktion $f(x,y)$.

Analytische Deutung der Ableitung im $\mathbb{R}^2$: Die Tangentialebene entspricht der linearen Approximation des Graphen von $f(x,y)$ (Abbildung 11). Um die Ebene zu beschreiben, genügen nun zwei linear unabhängige Tangentenvektoren. Diese sind analog zum gewöhnlichen Differential über die Steigungen der partiellen Differenzenquotienten an der Stelle $(x,y)$ bestimmt.

**Definition 3.5.** Die partiellen Ableitungen einer Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sind definiert über die beiden Grenzwerte

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y)}{\Delta x}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y)}{\Delta y}$$

**Definition 3.6.** Das totale Differential einer Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist definiert über die partiellen Ableitungen

$$df(x,y) = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}dx}_{a} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}dy}_{b}$$

In Abbildung 12 ist dieser Sachverhalt noch einmal graphisch illustriert. Die beiden partiellen Ableitungen bestimmen die lokalen Steigungen $a$ und $b$ der Funktion $f(x,y)$ in $x$- und in $y$-Richtung. Dabei ist zu erkennen, dass das totale Differential die absolute Steigung der Funktion im Punkt $(x,y)$ beschreibt. Das totale Differential ist also als Änderung der Funktion $f$ zu verstehen, wenn die Funktion durch ihre Tangentialebene genähert wird.

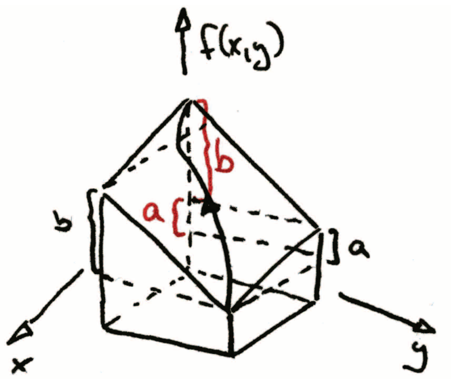


ABBILDUNG 12. Differentielles Tangentialelement einer Fläche.

Aus der Definition der partiellen Ableitung geht hervor, dass mit dieser wie mit der bekannten Ableitung bei Funktionen einer Veränderlichen gerechnet werden kann. So werden die anderen Variablen als Parameter betrachtet und dann die Berechnung vorgenommen. Sehr anschaulich wird dieses Prinzip, wenn die bereits bekannte Kettenregel der Differentiation in einer Variablen betrachtet wird (siehe auch Tabelle 2).

Die totale Ableitung einer parametrisierten Funktion $f = f(x,y) = f(x(t), y(t))$ nach dem Parameter $t$ ist definiert über das totale Differential

$$\frac{df}{dt}(x(t),y(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t)) \cdot \frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t)) \cdot \frac{dy}{dt}(t)$$

mit der Kurzschreibweise

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

Im Wesentlichen ist somit die totale Ableitung die Kettenregel für Funktionen mehrerer Veränderlicher. An dieser Stelle hilft ein erstes Beispiel sicher dem Verständnis:

**Beispiel 3.3.** *Es wird die Funktion* $f(x, y) = x^2 y$ *mit* $x(t) = 2t$ *und* $y(t) = 3t^2$ *betrachtet. Die totale Ableitung lautet nun*

$$\frac{df}{dt} = 2x(t)y(t) \cdot 2 + x(t)^2 \cdot 6t = 48t^3$$

Vielfach ist es angebracht eine Kurzschreibweise für partielle Ableitungen zu verwenden. So gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \partial_x f$$

Nachdem der Schwerpunkt bisher auf skalaren Funktionen lag, wird im nächsten Abschnitt die Erweiterung auf vektorwertige Funktionen vorgenommen.

## 8. Differentiation vektorwertiger Funktionen

Bei physikalischen Fragestellungen sind vielfach vektorwertige Funktionen von besonderem Interesse. Das sicher bekannteste Beispiel ist dabei die Ortskurve eines Teilchens $\vec{r}(t)$ in der klassischen Mechanik. Diese vektorwertige Funktion beschreibt die Position eines Punktteilchens zu jedem beliebigen Zeitpunkt.

Die Änderung des Ortes im Zeitintervall $\Delta t$ ist dabei der Vektor

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$$

und damit kann die mittlere Geschwindigkeit innerhalb dieses Zeitintervalls bestimmt werden zu

$$\overline{\vec{v}(t)} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

Aus der Grenzwertbildung der mittleren Geschwindigkeit mit $\Delta t \to 0$ resultiert daraus die momentane Geschwindigkeit

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} =: \frac{d\vec{r}}{dt}(t)$$

Dies ist der Tangentenvektor der Ortskurve. In Abbildung 13 sind die beiden verschiedenen Geschwindigkeiten und die Ortskurve eines Teilchen dargestellt.

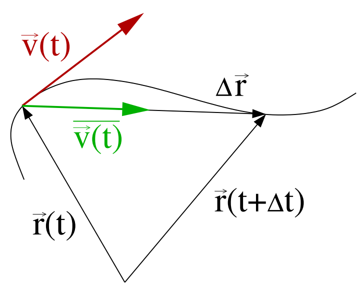


Abbildung 13. Geschwindigkeit eines Körpers und Ortskurve.

Da die Ortskurve mit der Zeit parametrisiert ist, kann festgehalten werden, dass der Tangentenvektor einer Kurve in Parameterdarstellung ganz allgemein über die Ableitung nach ihrem Parameter berechnet werden kann. Eine Kurve in der Ebene in Parameterdarstellung hat beispielsweise die Form

$$\vec{x} = \vec{x}(\lambda) = \begin{pmatrix} x_1(\lambda) \\ x_2(\lambda) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_1$$

mit dem Tangentenvektor und der Konvention, dass der Punkt die Ableitung nach dem Parameter symbolisiert

$$\vec{t} = \dot{\vec{x}}(\lambda) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(\lambda) \\ \dot{x}_2(\lambda) \end{pmatrix}$$

wobei die Ableitung vektorwertiger Funktionen komponentenweise erfolgt. Die Aufgabenstellung ist damit auf die Differentiation skalarer Funktionen in einer oder mehreren Variablen zurückgeführt.

Der Tangentenvektor als Ableitung nach dem Parameter ist für viele Bereiche der Integration im Mehrdimensionalen von besonderer Bedeutung. In einem ersten Beispiel ist die Bogenlänge eines Kurvenstückes im zweidimensionalen Raum zu bestimmen. Die Länge

$$L = \int_C ds \quad \text{mit Bogenelement} \quad ds = \left|\dot{\vec{x}}(t)\right| dt$$

wird dann berechnet gemäß

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \left|\dot{\vec{x}}(t)\right| dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}_1^2(t) + \dot{x}_2^2(t)}\, dt$$

Zur konkreten Berechnung des Integrals sei auf Abschnitt 12 verwiesen. Es ist mittels dieser Beziehung also möglich die Länge beliebiger Kurven im Raum zu bestimmen. Vielfach sind jedoch auch Flächen im Raum interessant. Diese Flächen sind nicht zwangsläufig Ebenen und werden dann erwartungsgemäß durch eine zweidimensionale Parameterdarstellung beschrieben

$$\vec{x}(u,v) = \begin{pmatrix} x_1(u,v) \\ x_2(u,v) \\ x_3(u,v) \end{pmatrix} \quad \text{mit } (u,v) \in B \subseteq \mathbb{R}^2$$

Für die Berechnung der Fläche ist es erforderlich den Normalenvektor dieser zu kennen. Zu diesem Zweck kann ausgenutzt werden, dass zwei linear unabhängige Tangentialvektoren der Ebene über die Ableitungen bestimmt sind. So gilt

$$\vec{n} = \vec{x}_u \times \vec{x}_v$$

mit den partiellen Ableitungen nach $u$ und $v$. Die beiden Tangentenvektoren spannen damit eine Tangentialebene an die Fläche auf und das Kreuzprodukt liefert dann den Normalenvektor. Im Punkt $\vec{x}_0$ lautet dann die Ebenengleichung für die Tangentialfläche

$$\vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{n} \cdot \vec{x}_0$$

Analog zur Berechnung der Bogenlänge gilt nun für den Inhalt einer Fläche im dreidimensionalen Raum

$$I(F) = \int_B |\vec{x}_u \times \vec{x}_v|\, d(u,v)$$

Zur direkten Lösung dieses Integrals sei auf Abschnitt 13 verwiesen. Dort wird auch eine Methodik zur Auswertung allgemeiner Kurven- und Flächenintegrale vorgestellt und die Anwendung an einigen Beispielen demonstriert. Letztlich bleibt festzuhalten, dass die hier vorgestellten Konzepte auch auf vektorielle Felder, die zumeist vom Ortsvektor abhängen, übertragbar sind.

Aus den letzten Abschnitten sollte in Erinnerung bleiben, dass die partiellen Ableitungen von Funktionen mehrerer Veränderlicher prinzipiell nichts anderes sind, als die gewöhnliche Ableitung der Funktion in einer Variablen, die dann entsteht, wenn alle Variablen bis auf eine als invariant angenommen werden.

## Teil 4. Integralrechnung einer Veränderlichen

In diesem Abschnitt werden die grundlegenden Eigenschaften der Integration noch einmal kurz wiederholt. Die Integration ist hierbei als Umkehrung der Differentialoperation zu verstehen. Dies bedeutet prinzipiell

$$\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x)$$

**Definition 4.1** (Unbestimmtes Integral)**.** Die Menge aller Stammfunktionen $F(x)$ der Funktion $f(x)$, das heißt die Menge aller Funktionen, die $f(x)$ als Ableitung besitzen, nennt man das unbestimmte Integral von $f$ und schreibt

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad \text{mit } \frac{dF}{dx}(x) = f(x)$$

Es sollen nun einige grundlegende Integrationsregeln vorgestellt werden. Die Integration ist eine lineare Operation, das heißt

$$\int \big[af(x) + bg(x)\big]dx = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx$$

Die explizite Lösung von Integralen ist zumeist nicht einfach. Vielfach wird die Differentation als Handwerk und die Integration als Kunst bezeichnet. Diese Aussage kann aber nicht unkommentiert bleiben, da viele Integrale elementar lösbar oder in Formelwerken aufgelistet sind. Eine kleine Übersicht über die wichtigsten Integrationstechniken soll an dieser Stelle gegeben werden.

Ein erstes wichtiges Werkzeug ist die sogenannte Substitutionsregel. Bei dieser wird die Funktion $f(x)$ durch eine andere Funktion ersetzt. So gilt

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt \quad \text{mit } x = g(t) \text{ und } dx = g'(t)dt$$

Wie unschwer zu erkennen ist, handelt es sich bei der Substitutionsregel um das entsprechende Äquivalent zur Kettenregel in der Differentialrechnung. Ein häufig auftretender Sonderfall der Substitionsregel ist die Ableitungsregel

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C \quad \text{mit } f(x) = t \text{ und } f'(x)dx = dt$$

Ebenso hilfreich ist in vielen Situationen die partielle Integration. Bei dieser wird das Integral folgendermaßen umgeformt

$$\int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)dx$$

Auch hier findet sich mit der Produktregel das entsprechende Gegenstück in der Differentialrechnung.

Die Anwendung dieser Methoden zur Lösung von unbestimmten Integralen wird in den nächsten zwei Teilabschnitten exemplarisch vorgestellt. Von besonderer Bedeutung innerhalb der Analysis ist der folgende

**Satz 4.2.** *Ist $F(x)$ eine Stammfunktion der stetigen Funktion $f(x)$, so gilt der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI)*

$$\int_a^b f(x)dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

Sind bei einem Integral, wie im Fall des HDIs, die Integrationsgrenzen gegeben spricht man von einem bestimmten Integral. Abschließend werden noch einige Eigenschaften von bestimmten Integralen vorgestellt. So können bei bestimmten Integralen die Integrationsintervalle zerlegt werden gemäß

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Das Vertauschen der Integrationsgrenzen führt zu einem Vorzeichenwechsel des Integrals

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Sind eine oder beide Integrationsgrenzen gleich unendlich wird das Integral als uneigentlich bezeichnet. Gleichermaßen spricht man von einem uneigentlichen Integral, wenn der Integrand $f(x)$ im untersuchten Intervall unbeschränkt ist.

## 9. Partielle Integration

Die Methode der partiellen Integration folgt unter Anwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung aus der Produktregel der Ableitung. Zum besseren Verständnis mögen zwei einfache Beispiele dienen.

**Beispiel 4.1.**

$$\begin{aligned}\int \cos^2 x dx &= \int (\sin x)' \cos x dx = \sin x \cos x - \int \sin x(-\sin x)dx = \\ &= \sin x \cos x + \int (1 - \cos^2 x)dx = \sin x \cos x + x - \int \cos^2 x dx\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}(\sin x \cos x + x)$$

**Beispiel 4.2.**

$$\int_0^1 xe^x dx = \Big[xe^x\Big]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = \Big[xe^x\Big]_0^1 - \Big[e^x\Big]_0^1 = 1$$

## 10. Substitutionsregel

Die Substitutionsregel folgt aus der Kettenregel der Ableitung. An dieser Stelle ist es erforderlich zu beachten, dass die Integrationsgrenzen ebenso substituiert werden müssen. Daraus ergibt sich die folgende Vorgehensweise. Zuerst werden die Integranden substituiert, dann wird das vereinfachte Integral ausgewertet und letztlich ist eine Rücksubstitution erforderlich.

**Beispiel 4.3.** *Es ist das Integral*

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx$$

*auszuwerten. Mit der Substitution $x = a\sin t$ und daraus folgend $dx = a\cos x\,dt$ ergibt sich dann*

$$\begin{aligned}\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx &= \int a\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}\,dx = \int a\sqrt{1-\sin^2 t}\cdot a\cos t\,dt = \\ &= \int a^2\cos^2 t\,dt \stackrel{PI}{=} \frac{a^2}{2}(\sin t\cos t + t)\end{aligned}$$

*und durch Rücksubstitution mit $t = \arcsin x/a$ folgt*

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\frac{x}{a}\right)$$

**Beispiel 4.4.** *Es wird die Lösung für das Integral*

$$\int_0^2 2x\exp x^2\,dx$$

*gesucht. Dazu wird zuerst substituiert gemäß*

$$g^{-1}(x) = x^2 = t \text{ und } 2x\,dx = dt$$

*wobei für die Grenzen die beiden Ersetzungen $a \to g^{-1}(a)$ und $b \to g^{-1}(b)$ gelten. Auf diese Weise wird das Integrationsintervall von $0 \le x \le 2$ nach $0 \le t \le 4$ transformiert. Die Auswertung des Integrals liefert dann*

$$\int_0^2 2x\exp x^2\,dx = \int_0^4 e^t\,dt = \left[e^t\right]_0^4 = e^4 - 1$$

Durch das Mitsubstituieren der Grenzen wird die Rücksubstitution im Fall von bestimmten Integralen eingespart. Analog kann das unbestimmte Integral mit der dann erforderlichen Rücksubstitution berechnet werden und anschließend werden noch die Integrationsgrenzen eingesetzt.

## 11. Tabelle wichtiger Integrale

In diesem Abschnitt werden noch einige wichtige Stammfunktionen tabellarisch zusammengefasst. Für eine ausführliche Auflistung ist aber auf die einschlägigen Formelsammlungen verwiesen [2, 3]. Diese Übersicht stellt die Stammfunktionen dar, die prinzipiell bekannt sein sollten.

Tabelle 3. Einige Standardintegrale.

| $F(x)$ | $f(x) = F'(x)$ | Bemerkungen |
|---|---|---|
| $\frac{1}{n+1}x^{n+1}$ | $x^n$ | $x \neq -1$ |
| $\ln\lvert x\rvert$ | $\frac{1}{x}$ | $x \neq 0$ |
| $-\cos x$ | $\sin x$ | |
| $\sin x$ | $\cos x$ | |
| $\arcsin x$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\lvert x\rvert < 1$ |
| $\arctan x$ | $\frac{1}{1+x^2}$ | |
| $\frac{1}{a}\exp(ax)$ | $\exp(ax)$ | $a \neq 0$ |

Nachdem die grundlegenden Prinzipien bei der Integration in einer Variablen wiederholt sind, kann in dem folgenden Abschnitt auf die Integration im $\mathbb{R}^n$ mit dem besonderem Schwerpunkt auf den $\mathbb{R}^3$ eingegangen werden. Auf diese Weise werden die unterschiedlichen Aspekte dieser mathematischen Einführung zusammengeführt.

## Teil 5. Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$

Im vorangehenden Abschnitt wurden Integrale über Funktionen einer Variablen betrachtet, doch stellt sich die Frage wie das Vorgehen in mehrdimensionalen Räumen aussieht. Zuerst stehen nun Integrale entlang einer Kurve im $\mathbb{R}^3$ im Zentrum des Blickfeldes. In Abschnitt 13 werden dann Integrale über Flächen und in Abschnitt 14 Volumenintegrale eingeführt.

### 12. Linienintegral

Die Integration einer vektoriellen Größe längs eines vorgegebenen Weges wird als Kurven- oder Linienintegral bezeichnet und hat die folgende Form

$$W = \int_C \vec{f}(\vec{r})d\vec{r}$$

mit dem Vektorfeld $\vec{f}(\vec{r})$. Aus der klassischen Mechanik ist dieses Integral als Arbeitsintegral bekannt. Dabei ist dann das Feld die Kraft und der Wert des Integrales die Arbeit, die erforderlich ist um einen Körper entlang des Weges $C$ in diesem Kraftfeld zu bewegen.

Dieses Kurvenintegral kann als Grenzübergang verstanden werden. Das Integral ist dabei als Summe über unendlich viele differentielle Intervalle zu betrachten

$$W = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \vec{f}(\vec{r}_i) \cdot \Delta\vec{r}(\vec{r}_i) = \int_C \vec{f}(\vec{r})d\vec{r}$$

In Abbildung 14 sind die einzelnen Bestandteile des Integrales noch einmal dargestellt. Das differentielle Linienelement $d\vec{r}$ ist dabei der Tangentialvektor an die Kurve $C$. Es wird also unter dem Integral das Skalarprodukt aus Feldvektor und Tangentialvektor der Kurve gebildet.

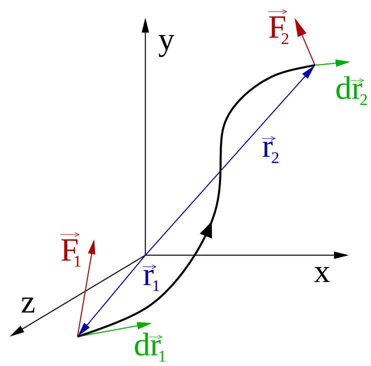


Abbildung 14. Das Arbeitsintegral.

Nachdem das Kurvenintegral eingeführt ist bleibt zu klären, wie dieses gelöst werden kann. Das Ziel bei dem nun vorgestellten Verfahren ist die Rückführung des Kurvenintegrals auf ein gewöhnliches Integral. Zu diesem Zweck sind drei Schritte notwendig. Zuerst wird die Kurve parametrisiert

$$C : \lambda \mapsto \vec{r}(\lambda) \text{ mit } \lambda \in \mathbb{D} \subset \mathbb{R} \tag{L.1}$$

um dann das Vektorfeld durch den Parameter zu beschreiben

$$\vec{f}(\vec{r}) \to \vec{f}(\vec{r}(\lambda)) \tag{L.2}$$

und letztlich muss noch das differentielle Linienelement angepasst werden. Für dieses gilt

$$d\vec{r} = \frac{d\vec{r}(\lambda)}{d\lambda} d\lambda \tag{L.3}$$

das heißt die Ableitung der Kurve nach dem Parameter $\lambda$ (Richtungsableitung in Richtung $\lambda$) liefert den Tangentenvektor an die Kurve. Insgesamt ergibt sich dann für das Arbeitsintegral

$$W = \int_C \vec{f}(\vec{r}) d\vec{r} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \vec{f}(\vec{r}(\lambda)) \frac{d\vec{r}}{d\lambda} d\lambda$$

Damit ist die Berechnung von Kurvenintegralen letztlich auf die Auswertung gewöhnlicher Integrale zurückgeführt. Es ist nun an der Zeit einige einfache Beispiele zu untersuchen.

**Beispiel 5.1.** *Gesucht wird das Arbeitsintegral im $\mathbb{R}^2$ entlang der $x$-Achse. Die Kurve ist damit definiert durch*

$$C(P_0, P_1) = C(0, P) \equiv \textit{Geradenstück vom Ursprung nach } P = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

*und es wird ein Feld der Form*

$$\vec{f}(\vec{r}) = -f_0 \cdot x \cdot \vec{e}_x = \begin{pmatrix} -f_0 \cdot x \\ 0 \end{pmatrix}$$

*betrachtet. Die Parametrisierung erfolgt nun auf naheliegende Weise durch die $x$-Koordinate. Diese entspricht hier auch der Bogenlänge der Kurve. Es werden nun die drei genannten Schritte durchgeführt*

$$C : \vec{r} = \vec{r}(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \quad \textit{mit } \lambda \in [0, x_0] \tag{L.1}$$

$$\vec{f}(\vec{r}(\lambda)) = -f_0 \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \tag{L.2}$$

*und für das differentielle Linienelement gilt*

$$\frac{d\vec{r}}{d\lambda} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{L.3}$$

*Auf diese Weise folgt für das Arbeitsintegral*

$$\begin{aligned} W &= \int_{C(0,P)} \vec{f} d\vec{r} = \int_0^{x_0} \vec{f}(\vec{r}(\lambda)) \cdot \frac{d\vec{r}}{d\lambda} d\lambda = \\ &= -\int_0^{x_0} f_0 \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} d\lambda = -\int_0^{x_0} \lambda d\lambda = -f_0 \frac{x_0^2}{2} \end{aligned}$$

Es bleibt festzuhalten, dass der Definitionsbereich des Parameters die Grenzen der Integration bestimmt. Zusätzlich ist es wichtig zu beachten, dass jede Kurve im Raum immer eine Richtung hat. Es ist also für die Integration entscheidend in welcher Richtung die Kurve durchlaufen wird. Ein zweiter Punkt der eine gewisse Sicherheit erfordert ist es Feldlinienbilder zu zeichen. Im nachfolgenden Beispiel wird dies kurz illustriert. Vom Prinzip muss nur der Feldvektor in einzelnen Raumpunkten ausgewertet werden, das heißt es werden einfach die Ortskoordinaten in den Feldvektor eingesetzt.

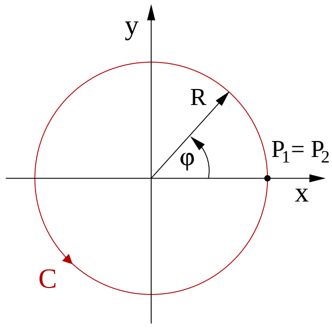


ABBILDUNG 15. Parametrisierung einer Kreislinie.

**Beispiel 5.2** (Kurvenintegral entlang Kreislinie mit Radius $R$)**.** *Gesucht wird das Linienintegral im $\mathbb{R}^2$ entlang einer Kreislinie. Für das Vektorfeld gilt*

$$\vec{f}(\vec{r}) = ax\vec{e}_y - ay\vec{e}_x = \begin{pmatrix} -ay \\ ax \end{pmatrix}$$

*Als Parameter bietet sich hier der Winkel $\varphi$ der ebenen Polarkoordinaten (siehe Abbildung 15) an. Es gilt dann*

$$x = R\cos\varphi \quad \textit{und} \quad y = R\sin\varphi$$

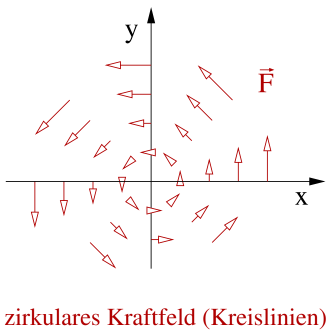


ABBILDUNG 16. Kraftfeldlinien eines zirkularen Feldes.

*Die Lösung des Kurvenintegrals wird nun mit Hilfe der Punkte* (L.1) *bis* (L.3) *bestimmt. So folgt für die Parametrisierung der Kurve*

$$C : \vec{r} = \vec{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \end{pmatrix} \quad \textit{mit } \varphi \in [0, 2\pi] \tag{L.1}$$

*Da der Parameter $\varphi$ das Intervall von $0$ bis $2\pi$ durchläuft, wird über den vollen Kreis integriert. Für das Vektorfeld, das in Abbildung 16 dargestellt ist, ergibt sich bei dieser Parameterwahl*

$$\vec{f}(\vec{r}(\varphi)) = a\begin{pmatrix} -R\sin\varphi \\ R\cos\varphi \end{pmatrix} \tag{L.2}$$

*und für das differentielle Linienelement gilt*

$$\frac{d\vec{r}}{d\varphi} = \begin{pmatrix} -R\sin\varphi \\ R\cos\varphi \end{pmatrix} \tag{L.3}$$

*Die Berechnung des Kurvenintegrales ist letztendlich durch das Einsetzen des parametrisierten Feldes und des differentiellen Linienelementes auf die Lösung eines gewöhnlichen Einfachintegrals zurückgeführt. So gilt*

$$\begin{aligned} W &= \int_C \vec{f} d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \vec{f}(\vec{r}(\varphi)) \cdot \frac{d\vec{r}}{d\varphi} d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} a \begin{pmatrix} -R\sin\varphi \\ R\cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -R\sin\varphi \\ R\cos\varphi \end{pmatrix} d\varphi = \\ &= a \int_0^{2\pi} \left(R^2 \sin^2\varphi + R^2\cos^2\varphi\right) d\varphi = a \int_0^{2\pi} R^2 d\varphi = 2a\pi R^2 \end{aligned}$$

Trotz der Ähnlichkeit des Ergebnisses aus Beispiel 5.2 mit der Formel für den Kreisumfang handelt es sich um ein etwas anderes Integral zur Berechnung der Länge des Kreisumfanges. Dann gilt nämlich

$$\text{Kreisumfang} \equiv \int_C ds = \int_C \left|\frac{d\vec{r}}{d\lambda}\right| d\lambda$$

man erkennt, dass es sich um den Spezialfall von

$$\int_C \varrho(\vec{r}) ds = \int_C \varrho(\vec{r}(\lambda)) \left|\frac{d\vec{r}}{d\lambda}\right| d\lambda$$

mit $\varrho(\vec{r}) = 1$ handelt. Abschließend soll das Vorgehen zur Berechnung beliebiger Kurvenintegrale schematisch zusammengefasst werden. So sind grundsätzlich alle Kurvenintegrale Integrale der Form

$$I = \int_C \vec{f}(\vec{r}) d\vec{r}$$

und die Berechnung läuft immer nach den Schritten (L.1) bis (L.3) ab. Zuerst wird die Kurve geeignet parametrisiert und im zweiten Schritt wird das Feld durch diesen Parameter ausgedrückt. Dabei ist zu beachten, dass die Wahl der Parameter entscheidend ist, wie aufwendig die weitere Vorgehensweise wird. So vereinfachen sinnvoll gewählte Parameter vielfach die nachfolgende Integration erheblich. Das fehlende differentielle Linienelement ist in einigen Situationen aufgrund vorgegebener Koordinatensysteme direkt aus der Formelsammlung zu entnehmen. Ist es aber erforderlich dieses zu berechnen, so wird dies mittels der Beziehung (L.3) getan. Der letzte Schritt besteht nun darin das so erhaltene gewöhnliche Einfachintegral aufzulösen.

Aus den Beispielen ist zu erkennen, dass Integrale im Allgemeinen wegabhängig sind. Hieraus folgt sogleich, dass Integrale über geschlossene Kurven dann auch ungleich Null sind. In diesem Fall spricht man von wegabhängigen Feldern. Der Test, ob ein Feld wegunabhängig ist, erfolgt über die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \quad \forall i,j \in [1,2,3] \quad \Leftrightarrow \quad \text{konservatives Feld}$$

Sind Felder konservativ, dann sind Linienintegrale über diese wegunabhängig und gleichermaßen Integrale über geschlossene Kurven gleich Null. Es zeigt sich also, dass es bei konservativen Feldern sinnvoll ist eine möglichst einfache Parametrisierung vorzunehmen, da auf diese Weise auch das Lösen des Integrals geringere Schwierigkeiten bereiten wird.

Wird anstelle eines Vektorfeldes über ein Skalarfeld integriert, dann gilt für das differentielle Bogenelement

$$I = \int_C f ds \quad \text{mit Bogenelement } ds = \left| \frac{d\vec{r}}{d\lambda} \right| d\lambda$$

man erkennt, dass es sich hierbei um einen einfachen Spezialfall der bereits vorgestellten Integration handelt. Die Berechnung ist dementsprechend gemäß des beschriebenen Schemas durchzuführen.

## 13. Flächenintegral

Nachdem nun Kurvenintegrale ausgiebig betrachtet wurden ist es naheliegend den Fluß eines Vektorfeldes durch eine Fläche zu untersuchen. So bestand bei den Linienintegralen die Vorgehensweise im Wesentlichen darin das Integral in ein gewöhliches eindimensionales Integral zu überführen. Sind nun beliebige Flächen im Raum von Interesse muss das Flächenintegral in ein gewöhnliches Doppelintegral umgeformt werden.

Den Ausgangspunkt bilden also die Doppelintegrale. Aber was sind diese? Ganz allgemein kann man sagen, dass es sich bei diesen um eine Schachtelung von zwei Integralen mit verschiedenen Integrationsvariablen handelt. Im Fall kartesischer Koordinaten haben diese die Form

$$\iint_G f dG = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y) dy dx$$

Vielfach ist es allerdings erforderlich allgemeine Koordinaten zu verwenden. In diesem Zusammenhang sei auf die Parametrisierung von Kurven und Flächen und damit zusammenhängend auf die Wahl alternativer Koordinatensysteme verwiesen. Es gilt dann

$$\iint_G f dG = \int_{u_1}^{u_2} \int_{v_1(x)}^{v_2(x)} f(u,v) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dv du$$

mit der Jacobi-Determinante

$$\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$$

wobei auf die Notation hinzuweisen ist. Es handelt sich bei den Einträgen in der Determinante selbstverständlich um partielle Ableitungen. Es ergibt sich dann beispielsweise für die Funktionaldeterminate in Polarkoordinaten

$$\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = r$$

mit der bekannten Parametrisierung

$$x = r \cdot \cos\varphi \quad \text{und} \quad y = r \cdot \sin\varphi$$

Die erste wichtige Anwendung von Flächenintegralen besteht in der Berechnung beliebiger Flächeninhalte. So folgt für den Flächeninhalt eines Gebietes $G$

$$F = \iint_G dG$$

Im ebenen Fall ist das ein einfaches Doppelintegral über das Gebiet $G$. Doch in vielen Situationen ist es auch erwünscht den Inhalt von gekrümmten Flächen zu bestimmen.

**Beispiel 5.3** (Doppelintegral)**.** *Es ist an dieser Stelle angebracht ein einfaches Beispiel zu Doppelintegralen zu untersuchen. Dabei gelte*

$$f(x,y) = -y \quad \textit{mit} \quad G: 0 \le x \le 1,\, x^2 \le y \le x$$

*Das untersuchte Gebiet ist in Abbildung 17 dargestellt. Es handelt sich also um die Fläche zwischen der Kurve mit* $y = x$ *und der Kurve* $y = x^2$*. Das Integral ist nun nicht die Fläche dieses Gebietes, da* $f \neq 1$ *gilt. Die konkrete Auswertung liefert*

$$\begin{aligned}\int_G f(x,y)dG &= -\int_0^1 \int_{x^2}^x y\,dydx = -\int_0^1 \left[\frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^x dx \\ &= -\int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2}\right] dx = \cdots = -\frac{1}{15}\end{aligned}$$

*Die Berechnung der Fläche ist nun ebenso einfach. Alternativ kann natürlich die Fläche auch über die Differenz zweier Integrale bestimmt werden.*

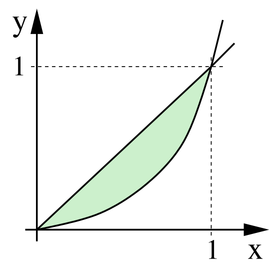


Abbildung 17. Doppelintegral.

Auf äquivalente Weise kann mit Dreifachintegralen verfahren werden. So gibt es eine Vielzahl an Aufgaben bei denen solche Dreifachintegrale gelöst werden müssen:

$$\text{Volumen} = \iiint_V dV$$

$$\text{Masse} = \iiint_V \varrho\, dV \quad \text{mit der Dichte } \varrho$$

Sind die Integrationsgrenzen unabhängig von den Integrationsvariablen, dann können die einzelnen Integrationen vertauscht werden. In Beispiel 5.3 war das nicht der Fall, wie durch einfaches Nachrechnen überprüft werden kann. Ein Vorgehen zur Lösung folgt dem Schema "von innen nach außen". Um das zu unterstreichen sollten die Integrale in einer geschachtelten Form geschrieben werden

$$\int_{x_0}^{x_1} \left( \int_{y_0}^{y_1} f\,dy \right) dx$$

Die allgemeine Behandlung von Flächenintegralen erfordert nun die Integration einer vektorwertigen Funktion $\vec{v}(\vec{r})$ über ein beliebig orientiertes gekrümmtes Flächenstück. Bei diesem handelt es sich dann nicht mehr zwingend um eine ebene Fläche, wie bei den zuvor behandelten Doppelintegralen. Das Integral

$$I = \int_A \vec{v}(\vec{r})\, d\vec{a} \tag{I.2}$$

wird auch als Flußintegral bezeichnet. Dabei ist das Gebiet $A$ ein beliebiges Flächenstück und $d\vec{a}$ das zugehörige differentielle Flächenelement. Dieses hat dabei die Eigenschaft in jedem Punkt normal zu Fläche gerichtet zu sein. In

Abbildung 18 ist dieser Sachverhalt illustriert. Es ist darauf hinzuweisen, dass das Doppelintegral der Spezialfall des Flächenintegrals bei einer ebenen Fläche nach der Berechnung des Skalarproduktes von Oberflächennormalenvektor und dem Flußvektor ist. Eine anschauliche Deutung des Flußintegrals kann gegeben werden, indem die Strömung einer Flüssigkeit durch eine Fläche untersucht wird. Das Vektorfeld ist dabei das Geschwindigkeitsfeld der Flüssigkeit und das Flußintegral ist die Flüssigkeitsmenge pro Zeiteinheit, die durch die Fläche strömt.

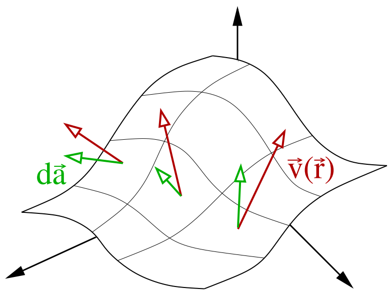


ABBILDUNG 18. Das Flächenintegral.

Es ist nun an der Zeit eine Methode zur Auswertung dieser nicht ganz einfachen Integrale vorzustellen. Es ist das Ziel das Flußintegral auf ein gewöhnliches Doppelintegral zurückzuführen. In einem ersten Schritt wird dazu die Fläche $A$ parametrisiert.

$$A : (u, v) \mapsto \vec{r}(u, v) \quad \text{mit } (u, v) \in \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2 \tag{F.1}$$

Anschließend wird das Vektorfeld entsprechend umgeformt

$$\vec{v}(\vec{r}) \to \vec{v}\,(\vec{r}(u, v)) \tag{F.2}$$

und dann ist noch das differentielle Flächenelement zu bestimmen. An dieser Stelle ist im allgemeinen Fall einiger Rechenaufwand erforderlich. So gilt

$$d\vec{a} = \pm \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) dudv \tag{F.3}$$

Dabei ist das Vorzeichen passend zur Oberflächennormalen zu wählen. Meist kann das beliebig geschehen, doch ist es immer notwendig die Richtung auch zu definieren. In vielen Fällen wird man auch auf einen etwas einfacheren Fall treffen. Dann wird nur das Integral über ein Skalarfeld $\varrho(\vec{r})$ untersucht

$$\int_A \varrho da = \int_A \varrho(\vec{r}(u, v)) \cdot |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| dudv$$

Man erkennt sofort, dass der einzige Unterschied darin besteht, dass bei dem differentiellen Flächenelement nur der Betrag erforderlich ist. Es werden nun drei unterschiedliche Beipiele zur Parametrisierung von Flächen vorgestellt. Das bedeutet, dass die Punkte (F.1) bis (F.3) der Berechnung von Flußintegralen ausgeführt werden.

**Beispiel 5.4** (Ebene parallel zur $xy$-Ebene)**.** *Als Parameter werden die $x$- und die $y$-Koordinaten gewählt. Damit gilt dann für den Ortsvektor*

$$A : \vec{r}(x, y) = (x, y, z_0)^T$$

*und damit folgt nach (F.3) für das differentielle Flächenelement*

$$d\vec{a} = \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \right) dxdy = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} dxdy = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dxdy = \vec{e}_z\, dxdy$$

*Erwartungsgemäß zeigt sich, dass die beiden partiellen Ableitungen äquivalent zu den entsprechenden Einheitsnormalenvektoren $\vec{e}_x$ und $\vec{e}_y$ sind. In Abbildung 19 ist die Parametrisierung der Ebene noch einmal anschaulich gezeigt.*

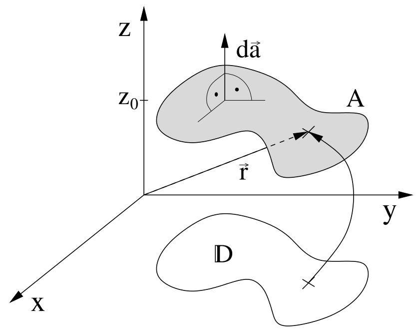


Abbildung 19. Parametrisierung einer Ebene.

**Beispiel 5.5** (Kreisfläche mit Radius $R$)**.** *Zur Parametrisierung kreisförmiger Flächen sind die ebenen Polarkoordinaten eine sinnvolle Wahl. Da nun nicht mehr eine ganze Ebene untersucht wird, erfordert die Beschreibung der Fläche auch die Angabe der Integrationsgrenzen. Es gilt $\varphi \in [0, 2\pi]$ und $r \in [0, R]$. So gilt für den Ortsvektor*

$$A : \vec{r}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z_0 \end{pmatrix}$$

*und damit folgt nach (F.3) für das differentielle Flächenelement*

$$\begin{aligned} d\vec{a} &= \left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial r} \times \frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\right) dr d\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} dr d\varphi = \\ &= r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dr d\varphi = \vec{e}_z r dr d\varphi \end{aligned}$$

*Das hier gewählte Koordinatensystem wird auch als Zylinderkoordinatensystem bezeichnet und die normierten Richtungsableitungen sind die Einheitsvektoren dieses Zylinderkoordinatensystems. In Abbildung 20 ist die Parametrisierung der Kreisfläche mit Radius $R$ bei $z = z_0$ noch einmal graphisch aufbereitet.*

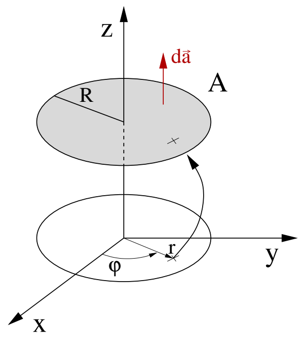


Abbildung 20. Parametrisierung eines Kreises.

Es wird abschließend ein drittes Beispiel zur Parametrisierung und Berechnung differentieller Flächenelemente gezeigt. Dazu ist es erforderlich einen Exkurs zum Thema Kugelkoordinaten vorzunehmen. Aus jeder Formelsammlung kann entnommen werden, dass Kugelkoordinaten durch zwei Winkel und den Radius bestimmt werden. Den Ausgangspunkt für die Bestimmung des Ortsvektors stellt dabei die Beschreibung einer Kugel in kartesischen Koordinaten dar. Zur besseren Veranschaulichung sind hierfür zwei Schnitte in den nachfolgenden Abbildungen gezeigt. In Abbildung 21 ist der Schnitt entlang der $z$-Achse zu sehen. Dabei wird ein erster Winkel $\vartheta$ eingeführt. Dieser beginnt bei der $z$-Achse und legt damit auch die Beziehung zwischen der kartesischen Koordinate $z$ und der sphärischen Koordinate $\vartheta$ fest.

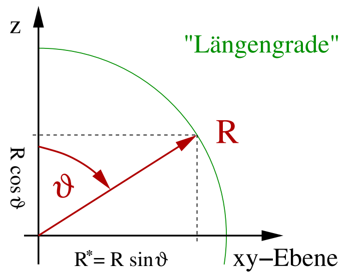


Abbildung 21. Kugelschnitt durch die Pole.

An dieser Stelle wird nun der Radius $R^* = R \sin\vartheta$ eingeführt. Diese Definition kann auch dem Abbildung entnommen werden. In Abbildung 22 ist der Schnitt der Kugel mit einer Ebene parallel zur $xy$-Ebene gezeigt. Mit dem Winkel $\varphi$ kann der Zusammenhang zwischen sphärischen und kartesischen Koordinaten vervollständigt werden.

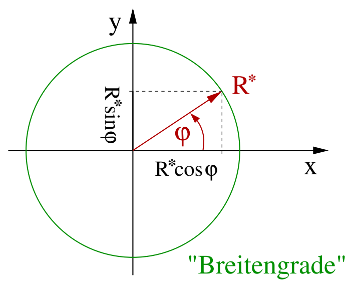


Abbildung 22. Kugelschnitt durch Breitengrade.

**Beispiel 5.6.** *Die Parametrisierung einer Kugeloberfläche wird nun mit Hilfe der beiden Raumwinkel bei konstantem Radius R durchgeführt. Auf diese Weise folgt für den Ortsvektor*

$$A : \vec{r}(\vartheta, \varphi) = R \cdot \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

*und für das differentielle Flächenelement gilt*

$$\begin{aligned} d\vec{a} &= \left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial\vartheta} \times \frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\right) d\vartheta d\varphi = \\ &= R \cdot \begin{pmatrix} \cos\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta\sin\varphi \\ -\sin\vartheta \end{pmatrix} \times R \cdot \begin{pmatrix} -\sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} d\vartheta d\varphi = \\ &= \cdots = R^2 \sin\vartheta \cdot \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} d\vartheta d\varphi = \vec{e}_r \cdot R^2 \cdot \sin\vartheta \cdot d\vartheta d\varphi \end{aligned}$$

*Das konkrete Ausrechnen des Vektorproduktes sei dem Leser überlassen. Jedoch sei eine kurze Anmerkung zu diesem Thema erlaubt. Die partiellen Ableitungen sind die Vektoren in Richtung der Parameter. Diese Richtungsableitungen in normierter Form ergeben damit die Einheitsnormalenvektoren.*

Nachdem nun einige Parametrisierungen gezeigt worden sind, ist es an der Zeit ein einfaches Beispiel der Flußintegralberechnung konkret vorzuführen. Dabei sei allerdings bemerkt, dass der aufwendigste Teil der Berechnung die Wahl geeigneter Parameter und die Berechnung der differentiellen Flächenelemente ist. Das Anpassen der Felder und die direkte Lösung des Integral ist dann eigentlich nur eine kleine Rechenübung.

**Beispiel 5.7** (Fluß durch Viertelkreis)**.** *In Abbildung 23 ist die Fläche und das dazugehörige Vektorfeld gezeigt. Das Feld sei $\vec{f} = C\vec{e}_z$ und damit an jedem Punkt im Raum konstant. In diesem Fall spricht man von einem homogenen Feld. Mit dem Viertelkreis in der xy-Ebene als Fläche $A$ gilt für den Ortsvektor in zylindrischer Parametrisierung*

$$A : \vec{r}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \tag{F.1}$$

*Im zweiten Schritt muss nun das Feld $\vec{f}$ in Parameterschreibweise dargestellt werden. Da es bereits direkt in Zylinderkoordinaten gegeben ist, ist dieser Punkt schon erfüllt. Für das differentielle Flächenelement folgt mit Beispiel 5.5*

$$d\vec{a} = \vec{e}_z \cdot r \cdot dr d\varphi \tag{F.3}$$

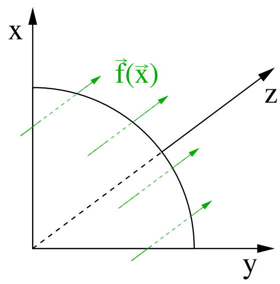


Abbildung 23. Berechnung des Flusses durch einen Viertelkreis.

*So wird aus dem Flußintegral ein Doppelintegral mit den Grenzen $\varphi = [0, \pi/2]$ und $r = [0, R]$*

$$I = \int_A \vec{f} d\vec{a} = \int_0^R \int_0^{\pi/2} C \cdot \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z \cdot r d\varphi dr = C \cdot \int_0^R \int_0^{\pi/2} r d\varphi dr = \frac{C\pi}{4} R^2$$

Aus den Beispielen und dem Studium der Formelsammlungen geht hervor, dass in den meisten Situationen die benötigten differentiellen Flächenelemente aus den Formelsammlungen entnommen werden können. Handelt es sich wie in Beipiel 5.6 um eine geschlossene Fläche $H$ die eine Berandung des Volumens $V$ darstellt, dann spricht man von einem Hüllflächenintegral und schreibt

$$\int_H \vec{v} d\vec{a} = \int_{\partial V} \vec{v} d\vec{a}$$

Für diesen Fall bleibt zu klären, wie diese Fläche orientiert sein muss. Bei den gewöhnlichen Flächenintegralen wurde festgehalten, dass es prinzipiell keine Vorzugsrichtung für den Flächennormalenvektor gibt. Im Gegensatz dazu wird bei Hüllflächen verlangt, dass der Normalenvektor nach aussen weist. Dieser Sachverhalt ist in Abbildung 24 einmal anschaulich dargestellt.

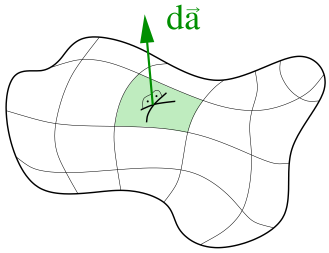


ABBILDUNG 24. Geschlossene Hüllfläche.

## 14. VOLUMENINTEGRAL

Die naheliegende Erweiterung von Flächenintegralen sind Volumenintegrale. Bei diesen wird eine skalare Größe in einem begrenzten Raum untersucht. Einige bekannte Beispiele sind die Volumen- oder auch die Massenberechnung von Körpern. Es liegt nahe, dass es sich bei der Berechnung um Dreifachintegrale handeln wird. Allgemein haben Volumenintegrale die folgende Form

$$Q = \int_V f(\vec{r})dV \quad , V \subset \mathbb{R}^3 \tag{I.3}$$

Die Berechnung dieser Volumenintegrale erfolgt analog zur Berechnung von Kurven- und Flächenintegralen. Das heißt, dass die einzelnen Schritte prinzipiell identisch sind. Zuerst wird daher das Integrationsgebiet parametrisiert. Da es sich um einen dreidimensionalen Raum handelt, gilt

$$V : (u, v, w) \mapsto \vec{r}(u, v, w) \quad \text{mit } (u, v, w) \in \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^3 \tag{V.1}$$

Anschließend wird in das skalare Feld $f(\vec{r})$ die Parametrisierung eingesetzt

$$f(\vec{r}) \to f\big(\vec{r}(u, v, w)\big) \tag{V.2}$$

und letztlich wird das Volumenelement $dV$ bestimmt. Auch in diesem Fall ist das Vorgehen wieder sehr leicht geometrisch zu interpretieren. Ein differentielles Volumenelement ist bestimmt durch ein Spat dreier Richtungsableitungen und damit gilt

$$dV = \left[\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right) \cdot \frac{\partial\vec{r}}{\partial w}\right] dudvdw \tag{V.3}$$

wobei dieser Term dem Spatprodukt und der Jacobi-Determinante entspricht und man damit auch die folgende Kurzschreibweise verwenden kann

$$dV = \left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}\right| dudvdw$$

Werden diese Schritte nacheinander ausgeführt und dann in das Integral (I.3) eingesetzt, resultiert schließlich ein Dreifachintegral, das oftmals ohne große Probleme gelöst werden kann.

An dieser Stelle ist es sinnvoll einige wichtige differentielle Volumenelemente zu berechnen. In weiten Teilen sind diese bereits an anderer Stelle im vorliegenden Skript enthalten, doch eine direkte Herleitung hilft sicher dem Verständnis. In kartesischen Koordinaten gilt für den Ortsvektor

$$\vec{r}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{mit } \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = \vec{e}_x,\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \vec{e}_y \text{ und } \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \vec{e}_z$$

Die Richtungsableitungen können durch das Ausrechnen der einzelnen partiellen Ableitungen schnell überprüft werden. Für das differentielle Volumenelement gilt dann

$$dV = \left[ (\vec{e}_x \times \vec{e}_y) \cdot \vec{e}_z \right] dxdydz = dxdydz$$

Die Berechnung des differentiellen Volumenelements erweist sich gleichermaßen in Zylinderkoordinaten als unproblematisch. So gilt für den Ortsvektor

$$\vec{r}(r,\varphi,z) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

mit den Richtungsableitungen

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \vec{e}_r, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = r\vec{e}_\varphi \quad \text{und} \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \vec{e}_z$$

und somit folgt das differentielle Volumenelement

$$dV = \left[ \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right) \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \right] drd\varphi dz = rdrd\varphi dz$$

Im Fall von Kugelkoordinatensystemen lautet der parametrisierte Ortsvektor dann

$$\vec{r}(r,\vartheta,\varphi) = \begin{pmatrix} r\sin\vartheta\cos\varphi \\ r\sin\vartheta\sin\varphi \\ r\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

mit den Richtungsableitungen

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \vec{e}_r, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta} = r\vec{e}_\vartheta \quad \text{und} \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = r\sin\vartheta\vec{e}_\varphi$$

und analog zu oben folgt für das differentielle Volumenelement

$$dV = \left[ \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta} \right) \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right] drd\vartheta d\varphi = r^2\sin\vartheta drd\vartheta d\varphi$$

Nachdem die wichtigsten differentiellen Volumenelemente bestimmt sind, kann das Volumen beliebig gestalteter Körper bestimmt werden.

**Beispiel 5.8** (Volumen einer Kugel)**.** *Es soll nun das Volumen einer Vollkugel mit Radius R berechnet werden. Es ist sinnvoll als Parameter Kugelkoordinaten zu wählen. Dabei sind die Integrationsgrenzen wie folgt festgelegt*

$$0 \le r \le R,\ 0 \le \vartheta < \pi, 0 \le \varphi < 2\pi$$

*Somit gilt*

$$\begin{aligned} V &= \int_V dV = \int_{K(0,R)} dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^R r^2 \sin\vartheta drd\vartheta d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^{\pi} \sin\vartheta d\vartheta \cdot \int_0^R r^2 dr = \cdots = \frac{4\pi}{3} R^3 \end{aligned}$$

*Man erkennt, dass dieses Ergebnis mit dem bekannten Wert für das Volumen einer Kugel übereinstimmt. Eine gute Übung ist es sich zu überlegen, was zu tun ist, um das Volumen einer Viertelkugel oder einer Kugelschale zu berechnen.*

## **Teil** 6. **Koordinatensysteme**

In den letzten Abschnitten sind die theoretischen Grundlagen zur Berechnung von Integralen im $\mathbb{R}^3$ gelegt worden. Dabei ist es immer erforderlich gewesen die Flächen- oder Linienelemente gemäß der Parametrisierung zu berechnen. In der praktischen Anwendung reduzieren sich die Schwierigkeiten dadurch, dass einige wenige Standardsysteme bei vielen unterschiedlichen Problemstellungen eingesetzt werden können.

Der vorliegende Abschnitt fasst nun die wesentlichen Eigenschaften der drei wichtigsten Koordinatensysteme vor. **Den Ausgangspunkt bildet dabei das kartesische System**. Alle bisher betrachteten Aufgaben waren in kartesischen Koordinaten gestellt. Bisweilen sind aber andere Systeme besser geeignet. In diesem Fall müssen auch die Basisvektoren angepasst werden. Ein wichtiges Werkzeug sind die Richtungsableitungen des Ortsvektors $\vec{r}$. Diese sind nämlich die unnormierten Basisvektoren des Systems. Durch Normieren erhält man dann die Einheitsnormalenvektoren des neuen Koordinatensystems.

### 15. Kartesische Koordinaten

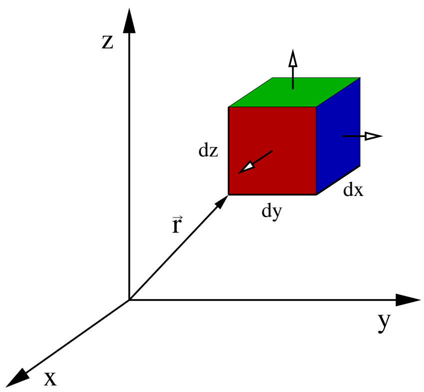


Abbildung 25. Kartesische Koordinaten.

In kartesischen Koordinatensystemen wird jeder Raumpunkt mit Hilfe der drei orthonormalen Basisvektoren $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ und $\vec{e}_z$ beschrieben. Diese Vektoren spannen dabei ein ortsfestes Dreibein auf. Für die Definitionsbereiche gilt:

$$x, y, z \in \mathbb{R}$$

und für den Ortsvektor folgt in kartesischen Koordinaten

$$\vec{r}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Damit lauten die drei orthonormalen Basisvektoren in kartesischen Koordinaten

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{e}_x \qquad \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{e}_y \qquad \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{e}_z$$

In Abbildung 25 ist das kartesische Koordinatensystem dargestellt und an dieser Stelle sind auch die in Tabelle 4 aufgelisteten differentiellen Flächenelemente farbig hervorgehoben.

Tabelle 4. Differentielle Elemente in kartesischen Koordinaten

| | |
|---|---|
| Linienelement | $d\vec{s} = \left\{ \vec{e_x}\, dx,\, \vec{e_y}\, dy,\, \vec{e_z}\, dz \right\}$ |
| Flächenelement | $d\vec{a} = \left\{ \vec{e_x}\, dydz,\, \vec{e_y}\, dxdz,\, \vec{e_z}\, dxdy \right\}$ |
| Volumenelement | $dV = dxdydz$ |

**Beispiel 6.1** (Würfel mit Kantenlänge $a$)**.** *Somit gilt für das Definitionsgebiet des Würfels $W = [0,a] \times [0,a] \times [0,a]$ und so folgen bei der Berechnung in kartesischen Koordinaten*

$$\begin{aligned} \textit{Umfang} &= 2\left(\int_0^a dx + \int_0^a dy\right) = 4a \\ \textit{Oberfläche} &= 2\left(\int_0^a\int_0^a dx\,dy + \int_0^a\int_0^a dx\,dz + \int_0^a\int_0^a dy\,dz\right) = 6a^2 \\ \textit{Volumen} &= \int_0^a\int_0^a\int_0^a dx\,dy\,dz = a^3 \end{aligned}$$

## 16. Zylinderkoordinaten

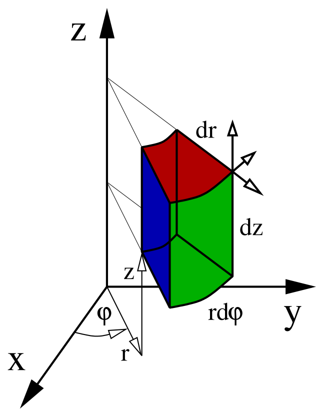


Abbildung 26. Zylinderkoordinaten.

In zylindrischen Koordinatensystemen wird jeder Raumpunkt mit Hilfe der drei orthonormalen Basisvektoren $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\varphi$ und $\vec{e}_z$ beschrieben. Diese bilden allerdings ein ortsabhängiges Dreibein. Für die Definitionsbereiche gilt:

$$r \in \mathbb{R}^+, \quad \varphi \in [0, 2\pi] \quad \text{und} \quad z \in \mathbb{R}$$

und für den Ortsvektor folgt in kartesischen Koordinaten

$$\vec{r}(r,\varphi,z) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

Damit lauten die drei orthonormalen Basisvektoren in kartesischen Koordinaten

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{e_r} \qquad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = r\,\vec{e_\varphi}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{e_z}$$

Aus diesen Beziehungen geht in der Umkehrung auch der Zusammenhang mit den kartesischen Koordinaten hervor

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right); \quad z = z$$

In Abbildung 26 ist das Zylinderkoordinatensystem dargestellt und an dieser Stelle sind auch die in Tabelle 5 aufgelisteten differentiellen Flächenelemente farbig hervorgehoben.

Tabelle 5. Differentielle Elemente in Zylinderkoordinaten

| | |
|---|---|
| Linienelement | $d\vec{s} = \left\{\vec{e_r}\,dr,\ \vec{e_\varphi}\,rd\varphi,\ \vec{e_z}\,dz\right\}$ |
| Flächenelement | $d\vec{a} = \left\{\vec{e_r}\,rd\varphi dz,\ \vec{e_\varphi}\,drdz,\ \vec{e_z}\,rd\varphi dr\right\}$ |
| Volumenelement | $dV = rdrd\varphi dz$ |

**Beispiel 6.2** (Zylinder mit der Höhe $h$ und Radius $R$). *Es resultieren dann*

$$Umfang = \int_U ds = \int_0^{2\pi} R\,d\varphi = 2\,\pi\,R$$

$$Deckelfläche = \int_D da = \int_0^{2\pi}\int_0^R r\,dr\,d\varphi = \pi\,R^2$$

$$Mantelfläche = \int_M da = \int_0^h\int_0^{2\pi} R\,d\varphi\,dz = 2\pi\,R\,h$$

$$Volumen = \int_Z dV = \int_0^h\int_0^{2\pi}\int_0^R r\,dr\,d\varphi\,dz = \pi\,R^2\,h$$

## 17. Kugelkoordinaten

In Kugelkoordinaten wird ein Punkt im Raum durch die drei orthonormalen Basisvektoren $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\vartheta$ und $\vec{e}_\varphi$ beschrieben. Diese Vektoren spannen hierbei ein ortsabhängiges Dreibein auf. Für die einzelnen Definitionsbereiche gilt:

$$r \in \mathbb{R}^+, \quad \vartheta \in [0, \pi] \quad \text{und} \quad \varphi \in [0, 2\pi]$$

und für den Ortsvektor folgt in kartesischen Koordinaten

$$\vec{r}(r, \vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\sin\vartheta \\ r\sin\varphi\sin\vartheta \\ r\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

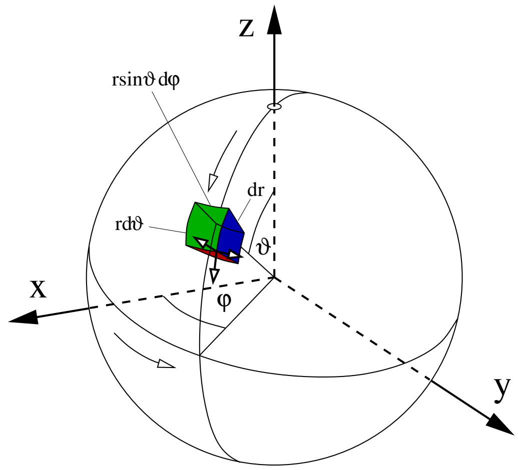


Abbildung 27. Kugelkoordinaten.

Damit lauten die drei orthonormalen Basisvektoren in kartesischen Koordinaten

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \, \sin\vartheta \\ \sin\varphi \, \sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} = \vec{e_r} \qquad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta} = \begin{pmatrix} r \, \cos\varphi \, \cos\vartheta \\ r \, \sin\varphi \, \cos\vartheta \\ -r \, \sin\vartheta \end{pmatrix} = r \, \vec{e_\vartheta}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -r \, \sin\varphi \, \sin\vartheta \\ r \, \cos\varphi \, \sin\vartheta \\ 0 \end{pmatrix} = r \sin\vartheta \, \vec{e_\varphi}$$

Aus diesen Beziehungen geht in der Umkehrung auch der Zusammenhang mit den kartesischen Koordinaten hervor

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \quad \vartheta = \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right); \quad \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

In Abbildung 27 ist das Kugelkoordinatensystem dargestellt und an dieser Stelle sind auch die in Tabelle 6 aufgelisteten differentiellen Flächenelemente farbig hervorgehoben.

Tabelle 6. Differentielle Elemente in Kugelkoordinaten

| | |
|---|---|
| Linienelement | $d\vec{s} = \left\{ \vec{e_r} \, dr, \, \vec{e_\vartheta} \, r d\vartheta, \, \vec{e_\varphi} \, r \sin\vartheta d\varphi \right\}$ |
| Flächenelement | $d\vec{a} = \left\{ \vec{e_r} \, r^2 \sin\vartheta d\vartheta d\varphi, \, \vec{e_\vartheta} \, r \sin\vartheta dr d\varphi, \, \vec{e_\varphi} \, r dr d\vartheta \right\}$ |
| Volumenelement | $dV = r^2 \sin\vartheta dr d\vartheta d\varphi$ |

**Beispiel 6.3** (Kugel mit Radius $R$)**.** *Es folgt dann*

$$\mathit{Umfang} \; = \int_B ds = \int_0^{2\pi} R \, \sin\vartheta \, d\varphi = 2\,\pi\,R \sin\vartheta$$

$$\mathit{Oberfläche} \; = \int_O da = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} R^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = 4\,\pi\,R^2$$

$$\textit{Volumen} \ = \int_K dV = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r^2 \, \sin\vartheta \, dr \, d\varphi \, d\vartheta = \frac{4}{3}\pi \, R^3$$

## Teil 7. Nachbemerkungen

Nach dieser kurzen Einführung in die mehrdimensionale Analysis ist es an der Zeit einige Hinweise zur Vorlesung Elektrizitätslehre zu geben. Die in diesem Skript behandelten Verfahren zur Integration werden im Verlauf des weiteren Semesters vielfach benötigt. Aus diesem Grund ist es sicher sinnvoll immer wieder die vorgestellten Methoden und Begriffe zu wiederholen.

Sind auch nach dem sorgfältigen Studium dieses Skriptes noch einige kleine Unsicherheiten im Umgang mit der Thematik vorhanden, ist es sicher ratsam die im Literaturverzeichnis empfohlenen Bücher heranzuziehen. Allerdings ist auch zu beachten, dass die einzelnen Techniken durch Wiederholung und in der physikalischen Anwendung meist besser verstanden werden.

## Literatur

[1] D.E. Bourne, P.C. Kendall, *Vektoranalysis.* B.G. Teubner Verlag, Stuttgart, 1988.
Dieses Buch ist eine gute Einführung in die Vektoranalysis. So wird nahezu der gesamte Stoff dieses mathematischen Einführungsskriptes und darüberhinaus auch einiges an Mathematik für die Elektromagnetische Feldtheorie behandelt.

[2] L. Råde, B. Westergren, *Springers Mathematische Formeln.* Springer-Verlag, Berlin, 1997.
Eine nahezu unverzichtbare Formelsammlung deren Wert besonders in Prüfungen nicht hoch genug einzuschätzen ist. Vieleicht ist der Springer das einzige Buch, das man für das Studium wirklich benötigt.

[3] I.N. Bronstein, K.A. Semendjajew, *Taschenbuch der Mathematik.* Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 1997.
Auch hierbei handelt es sich um eine gute mathematische Formelsammlung. Allerdings ist es in weiten Teilen mehr als Nachschlagewerk zu verstehen und daher in Prüfungen nicht unbedingt ideal.

[4] K. Meyberg, P. Vachenauer, *Höhere Mathematik 1.* Springer-Verlag, Berlin, 1997.
Ein kleiner Klassiker unter der Lehrbüchern zur Höheren Mathematik.

[5] G. Fischer, *Lineare Algebra.* Vieweg Verlag, Braunschweig und Wiesbaden, 1997.
Eine durchaus gelungene Einführung in die Lineare Algebra. Allerdings sollte ein wirkliches Interesse an dieser bestehen, da einige Sachverhalte etwas kompakter dargestellt werden.

[6] K. Königsberger, *Analysis 1.* Springer-Verlag, Berlin, 2004.
Ein absolutes Muss für alle, die mehr über die Analysis erfahren möchten. Gerade die Sprache und die historischen Bezüge machen dieses Buch so wertvoll.

[7] K. Läuger, *Mathematik kompakt.* Oldenbourg Verlag, München, 1992.
Sollten elementare Schwierigkeiten in der Mathematik bestehen, kann mit diesem Buch die Schulmathematik in einer kompakten Form wiederholt werden.

[8] G. Merziger, Th. Wirth, *Repetitorium der Höheren Mathematik - Ein Arbeitsbuch.* Binomi Verlag, Springe, 1999.
Dieses Buch bietet eine umfangreiche Aufgabensammlung für die Höhere Mathematik. Für die Prüfungsvorbereitung ist es insgesamt sehr hilfreich.

Lehrstuhl für Technische Elektrophysik, Technische Universität München
*E-mail address*: heigl@tep.ei.tum.de